Espaces Vectoriels Normés

I – Rappels sur les propriétés de R :

Définition :
Soit A une partie de R
1°) On dit qu'un réel M est la maximum de A ou le plus grand élément de A et on note M = max (A) si et seulement si M∈ A et M est un majorant de A.
2°) On dit que M est la borne supérieure de A et on note M = sup (A) si et seulement si M est le plus petit majorant de A.
NB : On a les mêmes définitions pour un minimum et une borne inférieure (au sens près)…

Propriété fondamentale de R :
Toute partie non vide et majorée de R possède une borne supérieure.

Remarque :
A étant une partie de R. M = max (A) $\leftrightarrow$ $\begin{cases} M \in A \\ M = \sup(A) \end{cases}$

Définition :
On appelle maximum ou borne supérieure de f : D $\rightarrow$ R le max ou la borne supérieure de la partie f (D) (s'ils existent !)

II- Normes et Distances :

Définition :
Soit E un ensemble quelconque. On dit que d est une distance sur E si et seulement si :
1°) d est une application de E^2 dans R+
2°) Séparation : $\forall(x,y)\in E^2$ $(d(x,y) = 0) \rightarrow (x = y)$
3°) Inégalité Triangulaire : $\forall(x,y,z)\in E^3$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
4°) Symétrie : $\forall(x,y)\in E^2$ $d(x,y) = d(y,x)$
Si d est une distance sur E, alors (E,d) est appelé espace métrique.

Définition :
Soit E un ensemble quelconque. On dit que ||.|| est une norme sur E si et seulement si :
1°) ||.|| est une application de E dans R+
2°) Séparation : $\forall x\in E$ $(\|x\| = 0) \leftrightarrow (x = 0)$
3°) Inégalité Triangulaire : $\forall(x,y)\in E^2$ $\| x + y \| \leq \|x\| + \|y\|$
4°) Homogénéité : $\forall x\in E, \forall\lambda\in K$ $\| \lambda.x \| = |\lambda| . \|x\|$
Si ||.|| est une norme sur E, alors (E,||.||) est appelé espace vectoriel normé.

Propriété :
Soit (E,||.||) un espace vectoriel normé. Alors l'application $(x,y) \mapsto d(x,y) = \| x - y \|$ est une distance sur E appelé distance associée à la norme ||.||

Propriété :
Si (E,||.||) est un espace vectoriel normé, alors : $\forall (x,y) \in E^2, \quad | \|x\| - \|y\| | \leq \| x - y \|$

Normes à connaître :

• $E = C^n$ (ou R^n)

1°) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2°) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ ($\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ pour R^n)

3°) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

• $E = M_{m,n}(K)$

1°) $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$

2°) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$

3°) $\|x\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$

• $E = C([a,b],K)$

1°) $\| f \|_1 = \int_a^b |f(x)|.dx$

2°) $\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 .dx}$

3°) $\| f \|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(x)|$

Définition :
Soit (E,||.||) un espace vectoriel normé. On appelle :
1°) Boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble : $B(x_0,r) = \{ x \in E \mid \| x - x_0 \| < r \}$
2°) Boule fermée de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble : $B'(x_0,r) = \{ x \in E \mid \| x - x_0 \| \leq r \}$
3°) Sphère de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble : $S(x_0,r) = \{ x \in E \mid \| x - x_0 \| = r \}$

Définition :
Une partie A d'un espace vectoriel normé E est bornée si et seulement si :
$\exists M \in R+, \forall x \in A, \|x\| \leq M$
La fonction $A \to R$, $x \mapsto \|x\|$ est majorée

! Attention ! les adjectifs "minoré" et "majoré" n'ont pas de sens pour une partie d'un espace vectoriel normé.

Définition :
Soit f : D → E. On dit que f est bornée si et seulement si : f (D) est une partie bornée de E.
si et seulement si : $\exists M \in R+, \forall x \in D, \|f(x)\| \leq M$.
On note B(D,E) l'ensemble des applications bornées de D dans E.

Propriété :
B(D,E) est un sous-espace vectoriel de F l'ensemble des applications de D dans E noté aussi E^D.

Propriété :
Pour f ∈ B(D,E), on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$. On définit ainsi une norme sur B(D,E) (norme uniforme). Donc $(B(D,E),\|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Définition :
On dit que deux normes N et N' sont équivalentes sur un espace vectoriel E si et seulement si :
$\exists\ \alpha,\beta > 0$ tels que $N \leq \alpha.N'$ et $N' \leq \beta.N$ (on note $N \sim N'$)

Propriété :
Les trois normes usuelles sur K^n sont équivalentes.

Propriété : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall (x,y) \in (R^n)^2$ $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

Propriété :
Toute fonction continue sur un segment est bornée.
Donc C([a,b],K) est un sous-espace vectoriel de B([a,b],K).

Remarque :
Les trois normes usuelles sur C([a,b],K) ne sont pas équivalentes.

Propriété :
Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
(FAUX en dimension infinie !!!)

III- Topologie d'un espace vectoriel normé :

Définition :
1°) x_0 est un point intérieur à A si et seulement si : $\exists\ r > 0, B(x_0,r) \subset A$
2°) x_0 est un point adhérent à A si et seulement si : $\forall\ r > 0, \exists\ y \in A \cap B(x_0,r)$

Remarque :
Si A est une partie non vide majorée de R, alors la borne supérieure de A est adhérente à A.

Définition :
On dit que la partie A d'un espace vectoriel normé est ouverte si et seulement si tout point de A est intérieur à A.

Propriété :
1°) Toute réunion d'ouverts est un ouvert
2°) Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert
3°) Toute boule ouverte est un ouvert

Définition :
On appelle fermé le complémentaire d'un ouvert.

Propriété :
1°) Toute intersection de fermés est un fermé
2°) Toute réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé
3°) Toute boule fermée est un fermé

Remarque :
Toute partie non vide, majorée et fermée de R possède un plus grand élément.

Définition :
Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, on appelle parties compactes de E les parties fermées et bornées de R.

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com